MATEMÁTICAS
PARA LOS GRADOS EN
ECONOMÍA Y EMPRESA

Cálculo Diferencial

Ejercicios y Problemas resueltos

Julián Rodríguez Ruiz
(Catedrático de Economía Aplicada. UNED)

Carmen García Llamas
(Profesora Titular de Economía Aplicada. UNED)

Mariano Matilla García
(Profesor Titular de Economía Aplicada. UNED).

MATEMÁTICAS PARA LOS GRADOS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

Cálculo Diferencial

Ejercicios y Problemas resueltos

UNED

EDICIONES ACADÉMICAS

ISBN: 978-84-92477-91-3
Depósito legal: M-24093-2013

Impreso por: Campillo Nevado, S.A.
Antonio González Porras, 35-37
28019 MADRID

Impreso en España / Printed in Spain

ÍNDICE

Prólogo 9

Capítulo 1. SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS 11

Conceptos Teóricos 11
Ejercicios y Problemas resueltos 21

Capítulo 2. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL 67

Conceptos Teóricos 67
Ejercicios y Problemas resueltos 78

Capítulo 3. DERIVADAS DE UNA FUNCIÓN 143

Conceptos Teóricos 143
Ejercicios y Problemas resueltos 152

Capítulo 4. FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES (I). 219

Conceptos Teóricos 219
Ejercicios y Problemas resueltos 227

Capítulo 5. FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES (II) . 257

Conceptos Teóricos 257
Ejercicios y Problemas resueltos 265

Capítulo 6. EXTREMOS DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES 305

Conceptos Teóricos 305
Ejercicios y Problemas resueltos 312

Capítulo 7. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO INTEGRAL 353

Conceptos Teóricos 353
Ejercicios y Problemas resueltos 363

PRÓLOGO

La enseñanza de las **matemáticas** en los planes de estudios de los nuevos **Grados**, supone una adecuación de sus capacidades y habilidades formales a las necesidades que eventualmente puedan aparecer a lo largo de su formación.

La asignatura de **Matemáticas para la economía: Cálculo** que se imparte en el **Grado de Economía** en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) es cuatrimestral, y de carácter formativo básico.

El desarrollo del programa correspondiente a las **Matemáticas para la economía: Cálculo** se recoge en siete capítulos. En cada capítulo se tratan los aspectos más relevantes de la materia objeto de estudio.

En el capítulo 1, se estudian las **Sucesiones y las series,** en los capítulos, 2 y 3 se desarrollan de las **Funciones reales de variable real** y las **Derivadas de una función**. En los capítulos 4, 5 y 6 se estudian las **Funciones reales de varias variables reales (I)** y **(II)** y los **Extremos de las funciones de varias variables**, respectivamente y finalmente en el capítulo 7 se desarrolla una **Introducción al cálculo integral** que forma por sí sólo, una unidad temática propia.

Para facilitar la adquisición de las competencias previstas para esta materia cada capítulo tiene la misma estructura. Los conceptos teóricos se ponen en valor mediante numerosos ejercicios y problemas, que aplicados al ámbito de la economía, tratan de clarificar y hacer más comprensible las dificultades de carácter matemático con que se encuentra el alumno.

Los autores han procurado, en la medida de lo posible, introducir algunas aplicaciones a la economía. Se pretende con ello que el estudiante aprecie la necesidad de utilizar las matemáticas para resolver los problemas reales que, en cada momento, se plantean en el mundo económico.

La intención de este libro, que ha sido elaborado por un equipo docente de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, experto en matemáticas y en métodos cuantitativos para la economía y empresa, es que sirva para la formación matemática de los alumnos que inician sus estudios en la ciencia económica.

Los Autores
Julio 2013

Capítulo 1

SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS

CONCEPTOS TEÓRICOS

SUCESIÓN

Conjunto de números en correspondencia biyectiva con el conjunto de los números naturales. Cada número es un término.

PROPIEDADES

Toda sucesión tiene primer elemento; todo término tiene siguiente (no hay último); existe una ley que permite conocer un término, sabiendo el lugar que ocupa.

ENTORNO DE UN PUNTO

Se llama entorno del punto P (de abscisa a) de radio δ, al segmento $(a - \delta, a + \delta)$ del que se excluyen los extremos (intervalo abierto).

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN (LÍMITE FINITO)

La sucesión a_n tiende al límite a, ($\lim a_n = a$) cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un N, tal que para todo $n > N$: $|a - a_n| < \varepsilon$.

Dentro de todo entorno del límite existen infinitos términos de la sucesión y fuera sólo un número finito.

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN (LÍMITE INFINITO)

Si fijado cualquier número A, tan grande como se quiera, para todo $n > N$, se cumple $|a_n| > A$ se dice que $\lim a_n = \infty$.

CONVERGENCIA

Una sucesión con límite finito es *convergente*. Si su límite es ∞, se dice que es *divergente*.

SUCESIONES MONÓTONAS

Si en una sucesión todo término es $\leq$ ($\geq$) que su siguiente, la sucesión se llama monótona creciente (decreciente).

Toda sucesión monótona creciente (decreciente) acotada superiormente (inferiormente) tiene límite.

LÍMITE DE LOS RESULTADOS OPERATIVOS (SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE)

Si a_n y b_n tienen límites finitos a y b, lím $(a_n + b_n) = a + b$, esto es, el límite de la suma igual a la suma de los límites.

Si a_n y b_n tienen límites finitos a y b, lím $(a_n b_n) = ab$, o sea, el límite del producto igual al producto de los límites.

Si a_n y b_n tienen límites finitos a y $b \neq 0$,

$$\text{lím} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

A continuación se incluye un cuadro con los valores de los límites, no sólo en los casos *normales*, sino también en los *singulares*. Las igualdades simbólicas tienen un sentido convencional, nemotécnico.

	lím a_n	lím b_n	Expresión simbólica	Resultado
lím $(a_n + b_n)$	a	b	—	$a + b$
	$+\infty$	b	$+\infty + b$	$+\infty$
	$-\infty$	b	$-\infty + b$	$-\infty$
	∞	b	$\infty + b$	∞
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty + \infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty - \infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty - \infty$	indeterminado

	lím a_n	lím b_n	Expresión simbólica	Resultado
lím $(a_n \cdot b_n)$	0	b	—	0
	0	acotado	—	0
	a	b	—	ab
	∞	$b \neq 0$	$\infty \cdot b$	∞
	∞	0	$\infty \cdot 0$	indeterminado
	∞	∞	$\infty \cdot \infty$	∞
lím $\dfrac{1}{b_n}$	—	$b \neq 0$	—	$\dfrac{1}{b}$
lím $\dfrac{a_n}{b_n}$	a	$b \neq 0$	—	$\dfrac{a}{b}$
	a	∞	$\dfrac{a}{\infty}$	0
	a	0	$\dfrac{a}{0}$	∞
	∞	b	$\dfrac{\infty}{b}$	∞
	0	0	$\dfrac{0}{0}$	indeterminado
	∞	∞	$\dfrac{\infty}{\infty}$	indeterminado

En todos los casos a y b repreentan límite finito, respectivamente de a_n y b_n.

LÍMITES INDETERMINADOS DE LAS FORMAS SIMBÓLICAS

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$$

El límite de la forma simbólica ∞/∞, si procede de

$$\text{lím} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q}$$

resulta

Si $p > q$ límite ∞
Si $p = q$ límite a_0/b_0
Si $p < q$ límite 0

Los límites 0/0, $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$, operando convenientemente, se suelen reducir a límites de la forma simbólica ∞/∞.

Para los límites de la forma simbólica $\infty - \infty$, cuando aparecen en forma de diferencias de raíces, conviene recordar las expresiones conjugadas:

Diferencia de raíces dada	Conjugada
$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$\sqrt{A} + \sqrt{B}$
$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$
$\sqrt[4]{A} - \sqrt[4]{B}$	$\sqrt[4]{A^3} + \sqrt[4]{A^2 B} + \sqrt[4]{AB^2} + \sqrt[4]{B^3}$
…………	………………………………………
$\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B}$	$\sqrt[n]{A^{n-1}} + \sqrt[n]{A^{n-2}B} + \sqrt[n]{A^{n-3}B} + \cdots +$ $+\sqrt[n]{AB^{n-2}} + \sqrt[n]{B^{n-1}}$

El producto de cada expresión por su conjugada siempre es $A - B$.

FÓRMULA DE STIRLING

Una aproximación de $n!$, se obtiene con

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

En el cálculo de límites $n!$ (en producto o cociente) se puede sustituir por

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

CRITERIO DE STOLZ

Si B_n es divergente y lím A_n/B_n es indeterminado

$$\text{lím} \frac{A_n}{B_n} = \text{lím} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}$$

LÍMITES DE LOS RESULTADOS OPERATIVOS (LOGARÍTMOS Y POTENCIAS)

Si lím $a_n = a > 0$ y si $b > 1$:

$$\text{lím} \log_b a_n = \log_b a$$

Si lím $a_n = > 0$ y $c =$ lím c_n (finito):

$$\text{lím}\ a_n^{c_n} = a^c$$

Se excluyen los casos en que a sea 0 ó $+\infty$ y c sea $\pm\infty$.

A continuación se incluye un cuadro similar al anterior (con las mismas observaciones) y que incluye los casos singulares.

	lím a_n	lím c_n	Expresión simbólica	Resultado
lím $a_n^{c_n}$	0	$-\infty$	$0^{-\infty}$	$+\infty$
	0	$c < 0$	0^{-c}	$+\infty$
	0	$c = 0$	0^0	indeterminado
	0	$c > 0$	0^{+c}	0
	0	$+\infty$	$0^{+\infty}$	0
	$a > 0$	c	—	a^c
	$+\infty$	$-\infty$	$(+\infty)^{-\infty}$	0
	$+\infty$	$c < 0$	$(+\infty)^{-c}$	0
	$+\infty$	$c = 0$	$(+\infty)^0$	indeterminado
	$+\infty$	$c > 0$	$(+\infty)^c$	$+\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$(+\infty)^{+\infty}$	$+\infty$
	$a = 0$	$+\infty$	$0^{+\infty}$	0
	$0 < a < 1$	$+\infty$	$a^{+\infty}$	0
	$a = 1$	$+\infty$	$1^{+\infty}$	indeterminado
	$a > 1$	$+\infty$	$a^{+\infty}$	$+\infty$
	$a = 0$	$-\infty$	$0^{-\infty}$	$+\infty$
	$0 < a < 1$	$-\infty$	$a^{-\infty}$	$+\infty$
	$a = 1$	$-\infty$	$1^{-\infty}$	indeterminado
	$a > 1$	$-\infty$	$a^{-\infty}$	0

Los casos de indeterminación resultantes son de las formas simbólicas

$$0^0, \quad \infty^0 \quad \text{y} \quad 1^\infty$$

LÍMITES INDETERMINADOS DE LAS FORMAS SIMBÓLICAS 0^0 E ∞^0

Se toman logaritmos neperianos y se reducen a límites de la forma simbólica $0 \cdot \infty$.

Conviene recordar para las aplicaciones

$$\text{lím}\,\frac{n^n}{a^n} = \infty; \quad \text{lím}\,\frac{a^n}{n^p} = \infty; \quad \text{lím}\,\frac{n^p}{\log_b n} = \infty$$

donde $a > 1$, $p > 0$, $b > 1$.

LÍMITES DE LA FORMA SIMBÓLICA 1^∞ · NÚMERO *e*

El número e es el límite de la sucesión

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{o sea} \quad e = \text{lím}\left(1 + \frac{1}{\text{n}}\right)^n$$

También se verifica

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Su valor aproximado es $e \simeq 2{,}71828...$

Si a_n^{bn} es límite indeterminado de la forma simbólica 1^∞, se verifica

$$\text{lím}\; a_n^{b_n} = e^{\text{lím}\; b_n(a_n - 1)}$$

resultando, en el exponente, un límite de la forma simbólica $\infty \cdot 0$.

SERIES

Dada la sucesión $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$, se llama serie a la sucesión $U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ...$, tal que

$$U_1 = u_1; \quad U_2 = u_1 + u_2; \quad U_3 = u_1 + u_2 + u_3; \quad \cdots \quad U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

Si lím $U_n = U$ (finito), la serie es convergente.

Si lím $U_n = \infty$ la serie es convergente.

Si lím U_n no existe la serie es oscilante.

CONDICIÓN NECESARIA DE CONVERGENCIA

La condición necesaria, pero no suficiente, de convergencia de una serie es lím $u_n = 0$.

La *condición necesaria* y suficiente de convergencia es que, fijado un $\varepsilon > 0$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k} + \cdots| < \varepsilon$$

desde un valor de n en adelante.

SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS. CRITERIOS DE CONVERGENCIAS

Criterio de D'Alambert

$$\text{Si } \lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = l \begin{cases} l < 1 & \text{Convergente} \\ l = 1 & \text{Dudoso} \\ l > 1 & \text{Divergente} \end{cases}$$

Criterio de Cauchy

$$\text{Si } \lim \sqrt[n]{u_n} = l \begin{cases} l < 1 & \text{Convergente} \\ l = 1 & \text{Dudoso} \\ l > 1 & \text{Divergente} \end{cases}$$

Criterio de Raabe

$$\text{Si } \lim n\left(1 - \frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = l \begin{cases} l > 1 & \text{Convergente} \\ l = 1 & \text{Dudoso} \\ l < 1 & \text{Divergente} \end{cases}$$

Criterio logarítmico

$$\text{Si } \lim \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = l \begin{cases} l > 1 & \text{Convergente} \\ l = 1 & \text{Dudoso} \\ l < 1 & \text{Divergente} \end{cases}$$

SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS Y NEGATIVOS

Una serie de términos positivos y negativos es *incondicionalmente convergente,* si alterando arbitrariamente el orden de sus términos, su suma no varía.

Teorema de Dirichlet: La condición necesaria y suficiente para que una serie sea incondicionalmente convergente es que la serie formada por los valores absolutos sea convergente. Si una serie de términos positivos y negativos cumple esta condición, se dice que es *absolutamente convergente*.

SERIES ALTERNADAS

Serie alternada es aquélla en la que los términos son alternativamente positivos y negativos.

La condición necesaria y suficiente para que una serie alternada sea convergente es que lím $u_n = 0$. Nótese que aquí es condición necesaria y suficiente, la que sólo era necesaria en las series de términos positivos.

SERIE GEOMÉTRICA

La serie $u_1 = a$, $u_2 = ar$, $u_3 = ar^2$ ...; $u_n = ar^{n-1}$ ... es convergente si $|r| < 1$; diverge si $|r| > 1$ y si $r = 1$; es oscilante si $r = -1$.

En el caso de convergencia $S = \dfrac{a}{1-r}\cdot$

SERIES ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS

Son el producto, término a término, de una progresión aritmética de razón d y una progresión geométrica de razón r.

Son convergentes si $|r| < 1$.

Siendo S la suma de una serie aritmético geométrica, se tiene que $S - Sr$ es una serie geométrica.

SERIES DE TIPO STIRLING

Son aquéllas en que su término general es cociente de dos polinomios, teniendo el denominador sólo raíces reales simples.

Si son convergentes, basta para obtener su suma, descomponer el término general en fracciones simples.

SERIES DE FACTORIALES

Son de la forma

$$u_n = \frac{P(n)}{(n+h)!}$$

donde $P(n)$ es un polinomio en n de grado k. Para obtener su suma se descompone u_n en suma de k términos de la forma

$$\frac{A_i}{(n+i)!}, \quad i = 0,1,...,k-1$$

A_i constantes. Hay que tener en cuenta que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

SERIES DEL TIPO DE LA ARMÓNICA

La suma de n términos de la llamada serie armónica es:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

donde H_n representa la suma de n términos de la serie armónica. Se tiene que

$$\text{lím} \frac{H_n}{\ln n} = 1$$

El valor de H_n es:

$$H_n = \ln n + \eta + \varepsilon_n$$

donde η es una constante, $\eta = 0{,}5772...$ $\varepsilon_n \to 0$ si $n \to \infty$.

La suma

$$P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} H_n$$

es la suma de los n primeros términos pares de la armónica, e

$$I_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

es la suma de los n primeros términos impares

$$I_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) =$$
$$= H_{2n} - P_n = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n$$

INTERÉS COMPUESTO

Si un capital c, se capitaliza a interés compuesto del r por 1 (tanto por ciento dividido por 100) el capital al cabo de t años es $C_t = c(1 + r)^t$.

INTERÉS CONTINUO

Si la capitalización en vez de anual fuera instantánea, el capital al cabo de t años sería $C_t = ce^{rt}$.

1

Calcular

$$\lim \frac{n^3+3n-1}{2n^2+n}$$

Se trata de un límite indeterminado de la forma simbólica $\frac{\infty}{\infty}$.

Dividiendo numerador y denominador por n^3:

$$\lim \frac{n^3+3n-1}{2n^2+n} = \lim \frac{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \infty$$

puesto que el numerador tiende a 1, ya que $\frac{3}{n^2}$ y $-\frac{1}{n^2}$ tiende a cero; por la misma razón, el denominador tiende a cero.

En la práctica, basta observar que el grado del numerador (3) es mayor que el grado del denominador (2) para poder afirmar que el límite es ∞.

2

Calcular

$$\lim \frac{n^3+3n-1}{n^4-3n^3}$$

Del mismo tipo del anterior.

Dividiendo numerador y denominador por n^4 se obtiene:

$$\lim \frac{n^3+3n-1}{n^4-3n^2} = \lim \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{1+\frac{3}{n^2}} = 0$$

puesto que el numerador tiende a cero y el denominador a 1.

De forma general:

$$\lim \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q} = 0 \quad \text{si}\, p < q$$

3

Calcular

$$\textbf{lím}\,\frac{\boldsymbol{2n^3-5n+2}}{\boldsymbol{5n^3+n^2-1}}$$

Dividiendo numerador y denominador por n^3 se obtiene:

$$\text{lím}\,\frac{2n^3-5n+2}{5n^3+n^2-1}=\text{lím}\,\frac{2-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}{5+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3}}=\frac{2}{5}$$

De forma general:

$$\text{lím}\,\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a_p}{b_0n^p+b_1n^{p-1}+\cdots+b_p}=\frac{a_0}{b_0}$$

esto es, si numerador y denominador tienen el mismo grado, el límite es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado.

4

Calcular

$$\textbf{lím}\,\frac{\sqrt[3]{\boldsymbol{n^4+3n-1}}}{\boldsymbol{n+2}}$$

El numerador resulta ser de grado $\dfrac{4}{3}$; el denominador es de primer grado; luego

$$\text{lím}\,\frac{\sqrt[3]{n^4-3n-1}}{n+2}=\infty$$

puesto que $\dfrac{4}{3}>1$.

5

Calcular

$$\textbf{lím}\,\frac{\sqrt{\mathbf{4}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\mathbf{3}\boldsymbol{n}+\mathbf{2}}}{\sqrt[3]{\mathbf{27}\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}}+\mathbf{6}\boldsymbol{n}-\mathbf{2}}}$$

El numerador y el denominador son del mismo grado: $\frac{2}{2}=\frac{3}{3}$. Por tanto, el límite será el cociente de los coeficientes de mayor grado, o sea:

$$\text{lím}\,\frac{\sqrt{4n^2+3n+2}}{\sqrt[3]{27n^3+6n-2}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$$

6

Calcular

$$\textbf{lím}\left(\frac{\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}}+\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\mathbf{3}\boldsymbol{n}}-\frac{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}+\mathbf{2}}\right)$$

El límite de cada sumando es ∞; por tanto, se trata de un límite de la forma indeterminada ∞ – ∞. Como:

$$\frac{n^3+n^2-1}{n^2+3n}-\frac{n^2+1}{n+2}=\frac{(n^3+n^2-1)(n+2)-(n^2+3n)(n^2+1)}{(n^2+3n)(n+2)}=$$

$$=\frac{n^2-4n-2}{n^3+5n^2+6n}$$

Se tiene

$$\text{lím}\left(\frac{n^3+n^2-1}{n^2+3n}-\frac{n^2+1}{n+2}\right)=\text{lím}\,\frac{n^2-4n-2}{n^3+5n^2+6n}=0$$

7

Calcular

$$\mathbf{lím}\left(\frac{\boldsymbol{n^2+3n+1}}{\boldsymbol{n+1}}-\frac{\boldsymbol{n^2-3n+1}}{\boldsymbol{n-1}}\right)$$

Ejercicio análogo al anterior. De

$$\frac{n^2+3n+1}{n+1}-\frac{n^2-3n+1}{n-1}=\frac{4n^2-2}{n^2-1}$$

resulta:

$$\text{lím}\left(\frac{n^2+3n+1}{n+1}-\frac{n^2-3n-1}{n-1}\right)=\text{lím}\frac{4n^2-2}{n^2-1}=4$$

8

Calcular

$$\mathbf{lím}\frac{\boldsymbol{2n^3-n^2+5}}{\boldsymbol{n^2+1}}\cdot\frac{\boldsymbol{3n+2}}{\boldsymbol{4n^2}}$$

El límite del primer factor es ∞; el del segundo es cero. Por tanto, se trata de un límite indeterminado de la forma simbólica $\infty \cdot 0$. Para deshacer la indeterminación basta efectuar el producto, convirtiéndose entonces en un límite indeterminado de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\text{lím}\frac{2n^3-n^2+5}{n^2+1}\cdot\frac{3n+2}{4n^2}=\text{lím}\frac{6n^4+n^3-2n^2+15n+10}{4n^4+4n^2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

9

Calcular

$$\mathbf{lím}\left(\sqrt{\boldsymbol{n^2+n+1}}-\sqrt{\boldsymbol{n^2-n+1}}\right)$$

Se trata de un límite indeterminado de la forma simbólica $\infty - \infty$.

Para desahacer este tipo de indeterminaciones, se multiplica y divide por la expresión conjugada:

$$\text{lím}\,(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}) =$$

$$= \frac{(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1})}{(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1})} =$$

$$= \text{lím}\,\frac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \text{lím}\,\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \text{lím}\,\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

donde para llegar al resultado se ha dividido numerador y denominador por n. Directamente se hubiese llegado al mismo resultado.

10

Obtener

$$\textbf{lím}\,(\sqrt{\boldsymbol{n}^2+6\boldsymbol{n}-1}-\boldsymbol{n})$$

Como $n=\sqrt{n^2}$, multiplicando y dividiendo por $\sqrt{n^2+6n-1}+\sqrt{n^2}$ se debe obtener:

$$\text{lím}\,(\sqrt{n^2+6n-1}-n) = \text{lím}\,\frac{n^2+6n-1-n^2}{\sqrt{n^2+6n-1}-\sqrt{n^2}} = \frac{6}{2} = 3$$

11

Calcular

$$\textbf{lím}\,(\sqrt[3]{\boldsymbol{n}^3+6\boldsymbol{n}^2}-\boldsymbol{n})$$

Procediendo como en el problema anterior se tendrá:

$$\text{lím}\,(\sqrt[3]{n^3+6n^2}-n) = \text{lím}\,(\sqrt[3]{n^3+6n^2}-\sqrt[3]{n^3}) =$$

$$= \text{lím}\,\frac{n^3+6n^2-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+6n^2)^2}+\sqrt[3]{(n^3+6n^2)n^3}+\sqrt[3]{(n^3)^2}} =$$

$$= \text{lím}\,\frac{6n^2}{\sqrt[3]{(n^3+6n^2)^2}+\sqrt[3]{(n^3+6n^2)n^3}+\sqrt[3]{(n^6)}} = \frac{6}{3} = 2$$

valor que resulta inmediato después de dividir numerador y denominador por n^2.

12

Obtener

$$\mathbf{lím}\frac{\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}-\dfrac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}}}{\dfrac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\mathbf{1}}}$$

Como todos los términos del numerador y denominador

$$\frac{1}{n},\frac{3}{n^2},\frac{n+1}{n^2+1}$$

tienden a cero, se trata de un límite de la forma simbólica 0/0. Multiplicando numerador y denominador por $n^2(n^2 + 1)$, se obtiene:

$$\text{lím}\frac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{n+1}{n^2+1}}=\text{lím}\frac{n(n^2+1)-3(n^2+1)}{n^2(n+1)}\text{lím}\frac{n^3-3n^2+n-3}{n^3+n^2}=1$$

por ser los polinomios del numerador y denominador del mismo grado y tal que los coeficientes de los términos de mayor grado (n^3) son iguales e iguales a uno.

13

Obtener

$$\mathbf{lím}\frac{\mathbf{1^2+2^2+3^2+\cdots+\boldsymbol{n}^2}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}}}$$

Se trata de una indeterminación de la forma simbólica $\dfrac{\infty}{\infty}$; si conociéramos la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales, podríamos sustituir el numerador por dicho valor, pero suele resultar ventajosa la aplicación del denominado *criterio de Soltz:*

$$\text{lím}\frac{A_n}{B_n}=\text{lím}\frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}}$$

donde A_{n-1} y B_{n-1} designan las mismas expresiones que A_n y B_n, pero escribiendo $n-1$ en lugar de n y, además, B_n es divergente.

Así, en nuestro caso, como

$$A_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

se tendrá

$$A_{n-1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-2)^2 + n-1)^2$$

y como $B_n = n^3$, $B_{n-1} = (n-1)^3$. Por tanto:

$$\text{lím}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} =$$

$$= \text{lím}\frac{[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2]-[1^2+2^2+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2]}{n^3-(n-1)^3} =$$

$$= \text{lím}\frac{n^2}{n^3-n^3+3n^2-3n+1} = \text{lím}\frac{n^2}{3n^2-3n+1} = \frac{1}{3}$$

14

Calcular

$$\textbf{lím}\frac{\mathbf{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}}{\mathbf{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2}}$$

Aplicando el criterio de Stolz, como B_n es divergente y

$$A_{n-1} = 1^2 + 3^3 + 5^2 + \cdots + [2(n-1)-1]^2$$
$$B_{n-1} = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + [2(n-1)]^2$$

Se tendrá

$$\text{lím}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2} = \text{lím}\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} = \text{lím}\frac{4n^2-4n+1}{4n^2} = 1$$

15

Calcular

$$\textbf{lím}\,\frac{\ln n}{n}$$

donde ln representa logaritmo neperiano.

Aplicando el criterio de Stolz:

$$\text{lím}\,\frac{\ln n}{n} = \text{lím}\,\frac{\ln n - \ln(n-1)}{n-(n-1)} = \text{lím}\,\frac{\ln\dfrac{n}{n-1}}{1} = 0$$

puesto que

$$\frac{n}{n-1} \to 1$$

y, por tanto,

$$\ln\frac{n}{n-1} \to 0$$

16

Calcular

$$\textbf{lím}\,\frac{n^2}{2^n}$$

Por aplicación sucesiva del criterio de Stolz:

$$\text{lím}\,\frac{n^2}{2^n} = \text{lím}\,\frac{n^2-(n-1)^2}{2^n-2^{n-1}} = \text{lím}\,\frac{2n-1}{2^{n-1}} =$$

$$= \text{lím}\,\frac{2n-1-[2(n-1)-1]}{2^{n-1}-2^{n-1-1}} = \text{lím}\,\frac{2}{2^{n-2}} = 0$$

17

Obtener

$$\textbf{lím}\,\frac{\mathbf{3^n}}{\boldsymbol{n^n}}$$

Como $\dfrac{3^n}{n^n} = \left(\dfrac{3}{n}\right)^n$ se tiene:

$$\text{lím}\,\frac{3^n}{n^n} = \text{lím}\left(\frac{3}{n}\right)^n = 0$$

puesto que $\dfrac{3}{n} \to 0$.

NOTA: Los resultados de los ejercicios 15, 16 y 17 se pueden escribir directamente, teniendo en cuenta lo dicho en el resumen teórico en límites indeterminados.

18

Calcular

$$\textbf{lím}\left(\frac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{n-1}}\right)^{\boldsymbol{2n}}$$

Sabiendo que si lím $a_n = 1$ y lim $b_n = \infty$, esto es, si lím $a_n^{b_n}$ es un límite de la forma simbólica 1^∞, se tiene,

$$\text{lím}\, a_n^{b_n} = e^{\text{lím}\, b_n(a_n - 1)}$$

se obtiene

$$\text{lím}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2n} = e^{\text{lím}\,2n\left(\frac{n+1}{n-1}-1\right)}$$

Calculemos:

$$\text{lím}\,2n\left(\frac{n+1}{n+1}-1\right) = \text{lím}\,2n\,\frac{n+1-(n-1)}{n-1} = \text{lím}\,2n\,\frac{2}{n-1} = \text{lím}\,\frac{4n}{n-1} = 4$$

Por tanto:

$$\text{lím}\left(\frac{n+1}{n+1}\right)^{2n} = e^4$$

19

Obtener

$$\textbf{lím}\left(\frac{\boldsymbol{n^2+3n-1}}{\boldsymbol{n^2-n+3}}\right)^{\frac{\boldsymbol{n^2-1}}{\boldsymbol{2n}}}$$

Procediendo como en el ejercicio anterior,

$$\text{lím}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2-n+3}\right)^{\frac{n^2-1}{2n}}=e^{\text{lím}\frac{n^2-1}{2n}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2-b+3}-1\right)}$$

y como

$$\text{lím}\frac{n^2-1}{2n}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2-n+3}-1\right)=\text{lím}\frac{n^2-1}{2n}\cdot\frac{4n-4}{n^2-n+3}=$$

$$=\text{lím}\left(\frac{4n^3-4n^2-4n+4}{2n^3-2n^2+6n}\right)=\frac{4}{2}=2$$

se tendrá:

$$\text{lím}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2-n+3}\right)^{\frac{n^2-1}{2n}}=e^2$$

20

Calcular

$$\textbf{lím}\left(\sqrt{\frac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{n}}}\right)^{\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n+1}}-\sqrt{\boldsymbol{n}}}}$$

Es un límite de la forma simbólica 1^{∞}, ya que

$$\text{lím}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\text{lím}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\text{lím}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

Por tanto,

$$\lim \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}} = e^{\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1\right)}$$

Calculando por separado el límite que figura en el exponente

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1\right) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-1\right) =$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

El límite pedido es $e^0 = 1$.

21

Calcular

$$\mathbf{lím}\ n(\sqrt[n]{a}-1)$$

donde *a* es un número positivo cualquiera.

Formemos la sucesión:

$$n(\sqrt[n]{a}-1) = u_n$$

de donde:

$$a = \left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n$$

Tomando límites en ambos miembros —como el límite de una constante es ella misma— se tendrá:

$$a = \lim \left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n = e^{\lim n \cdot \frac{u_n}{n}} = e^{\lim u_n}$$

y tomando logaritmos neperianos:

$$\lim u_n = \ln a$$

o sea:

$$\lim n(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a$$

22

Obtener

$$\textbf{lím}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{2n}$$

Se trata de un límite indeterminado de la forma 1^{∞}, luego

$$\text{lím}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{2n}=e^{\text{lím } 2n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)}$$

y como:

$$2n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)=n(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2)=$$

$$=n(\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1)=n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)$$

Así pues, se tendrá que

$$\text{lím}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{2n}=e^{\text{lím }[n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)]}=e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln ab}=ab$$

donde se ha tenido en cuenta el resultado del problema anterior y que

$$a^{\log_a A}=A$$

23

Calcular

$$\textbf{lím}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^{3n}$$

Similar al anterior; se trata de un límite de la forma simbólica 1^{∞}, ya que

$$\text{lím}\sqrt[n]{a}=\text{lím}\sqrt[n]{b}=\text{lím}\sqrt[n]{c}=1$$

Por tanto, recordando que si lím $a_n = 1$ y lím $b_n = \infty$

$$\text{lím } a_n^{b_n}=e^{\text{lím } b_n(a_n-1)}$$

Se tendrá

$$\lim\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^{3n}=e^{\lim 3n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}-1\right)} \qquad [I]$$

Para mayor comodidad, calculamos el límite (del exponente, claro está) por separado

$$\lim 3n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}-1\right)=\lim 3n\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}=$$

$$=\lim n[(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)]=$$

$$=\lim n[\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)]=\ln a+\ln b+\ln c=\ln(abc)$$

Por tanto, sustituyendo en [I]

$$\lim\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^{3n}=e^{\ln abc}=abc$$

puesto que, como se ha visto en el ejercicio anterior

$$a^{\log_a A}=A$$

24

Calcular, siendo $h > 0$;

$$\lim\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n+h)}$$

Aplicando el criterio de Stolz

$$\lim\frac{A_n}{B_n}=\lim\frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}}$$

ya que ln $(n + h)$ es divergente,

$$\lim \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}{\ln(n+h)-\ln(n+h-1)} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\ln\frac{n+h}{n+h-1}} =$$

$$= \lim \frac{1}{n\ln\frac{n+h}{n+h-1}} = \lim \frac{1}{\ln\left(\frac{n+h}{n+h-1}\right)^n} = \lim \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n+h-1}\right)^n}$$

Calculando

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+h-1}\right)^n = e^{\lim n\frac{1}{n+h-1}} = e$$

y como ln e = I, resulta que el límite buscado es la unidad.

25

Calcular

$$\mathbf{\lim \sqrt[2n]{n^3}}$$

Como el límite buscado se puede escribir

$$\lim \sqrt[2n]{n^3} = \lim (n^3)^{\frac{1}{2n}} = \lim n^{\frac{3}{2n}}$$

se aprecia inmediatamente que es de la forma simbólica ∞^0. Tomando logaritmos neperianos en

$$A = \lim n^{\frac{3}{2n}}$$

se obtiene

$$\ln A = \lim \ln(n^{\frac{3}{2n}}) = \lim \frac{3}{2n}\ln n$$

o bien

$$\ln A = \lim \frac{3\ln n}{2n}$$

Como se trata del límite de una función logarítmica entre una función potencial, se ha visto que su límite es cero; luego

$$\ln A = 0 \to A = e^{o} = 1$$

que es el límite buscado.

26

Obtener

$$\textbf{lím}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}$$

Se trata de un límite de la forma simbólica 0^0; tomando logaritmos neperianos en

$$A = \text{lím}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{3n-1}}$$

resulta

$$\ln A = \text{lím}\frac{1}{3n-1}\cdot\ln\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \text{lím}\frac{1}{3n-1}[-\ln(2n+1)] = \text{lím}\frac{-\ln(2n+1)}{3n-1}$$

Como en el ejercicio anterior, se trata del cociente de una función logarítmica dividida por una potencial, cuyo límite es cero.

Por tanto,

$$\ln A = 0 \quad ; \quad A = e^{0} = 1$$

esto es, el límite pedido es la unidad.

27

Sea la sucesión

$$\boldsymbol{u}_{\mathbf{1}} = \sqrt{\mathbf{2}}; \quad \boldsymbol{u}_{\mathbf{2}} = \sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}}}; \quad \boldsymbol{u}_{\mathbf{3}} = \sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}...}}}$$

se pide demostrar que es monótona creciente.

La sucesión es monótona creciente, puesto que

$$u_1 < u_2$$

dado que $\sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Observemos que $\sqrt{2+u_{n-1}} = u_n$.

Sumando 2 en los dos miembros de $u_1 < u_2$ y extrayendo raíz cuadrada:

$$\sqrt{2+u_1} < \sqrt{2+u_2}$$

o sea:

$$u_2 < u_3$$

Repitiendo el proceso

$$\sqrt{2+u_2} < \sqrt{2+u_3}$$

o sea:

$$u_3 < u_4$$

Por tanto

$$u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < \ldots < u_{n-1} < u_n < \ldots$$

la sucesión es monótona creciente.

28

Demostrar que la sucesión del ejercicio anterior está acotada superiormente.

Veamos que $u_n < 2$.

En efecto:

$$u_1 = \sqrt{2} < 2$$

Sumando 2 en los dos miembros:

$$2 + u_1 < 4$$

y extrayendo raíz cuadrada (véase problema anterior),

$$\sqrt{2+u_1} = u_2 < 2$$

Repitiendo el proceso

$$2+u_2 < 4; \quad \sqrt{2+u_2} = u_3 < 2$$

En general, $u_{n-1} < 2$, de donde

$$\sqrt{2+u_{n-1}} = u_n < \sqrt{4} = 2$$

Luego la sucesión está acotada superiormente.

NOTA. Al haber probado que la sucesión es monótona creciente y que está acotada superiormente, queda probada la existencia del límite de dicha sucesión.

Si se tratara de una sucesión monótona decreciente se debería probar que está acotada inferiormente.

29

Obtener el límite de la sucesión del ejercicio 27.

Elevando al cuadrado los dos miembros de

$$u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$$

se obtiene

$$u_n^2 = 2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$$

o sea:

$$u_n^2 = 2 + u_{n-1}$$

Designando por x a lím u_n y como lím $u_{n-1} = x$ (puesto que el límite es único), se tendrá:

$$x^2 = 2 + x; \quad x^2 - x - 2 = 0$$

ecuación que proporciona

$x_1 = 2 \quad x_2 = -1$ (solución extraña introducida al elevar al cuadrado)

Luego: lím $u_n = 2$.

30

En una sucesión cada término es la semisuma de los dos anteriores. Si $u_1 = a$ y $u_2 = b$, se pide lím u_n.

Del enunciado se desprende:

$$\frac{u_1+u_2}{2} = u_3; \quad \frac{u_2+u_3}{2} = u_4; \quad \frac{u_3+u_4}{2} = u_5;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{u_{n-4}+u_{n-3}}{2} = u_{n-2}; \quad \frac{u_{n-3}+u_{n-2}}{2} = u_{n-1}; \quad \frac{u_{n-2}+u_{n-1}}{2} = u_n$$

que podemos escribir:

$$u_1 + u_2 = 2u_3$$
$$u_2 + u_3 = 2u_4$$
$$u_3 + u_4 = 2u_5$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n-4} + u_{n-3} = 2u_{n-2}$$
$$u_{n-3} + u_{n-2} = 2u_{n-1}$$
$$u_{n-2} + u_{n-1} = 2u_n$$

Sumando miembro a miembro y simplificando:

$$u_1 + 2u_2 = u_{n-1} + 2u_n$$

pero como $u_1 = a$ y $u_2 = b$;

$$a + 2b = u_{n-1} + 2u_n$$

Pasando al límite, si designamos lím $u_n = x$, también lím $u_{n-1} = x$, luego

$$a + 2b = x + 2x$$
$$x = \frac{a+2b}{3}$$

que es el límite pedido.

31

Calcular

$$\textbf{lím}\,\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

En los casos en que aparecen factoriales, suele ser muy útil la aplicación de la fórmula de Stirling

$$\text{lím}\,\frac{\sqrt[n]{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}}{n!} = 1$$

que pone de manifiesto que ambos infinitos son equivalentes y, por tanto, que $n!$ puede ser sustituido en productos o cocientes, por la expresión de Stirling. En nuestro problema, se tendrá:

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim \frac{\sqrt[n]{\sqrt[n]{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}}}{n} \lim \frac{\sqrt[n^2]{2\pi n} \cdot n \cdot e^{-1}}{n}$$

Pero $\lim \sqrt[n]{2\pi n} = 1$

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

32

Calcular

$$\mathbf{\lim \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n}}$$

Como $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, se tendrá :

$$\lim \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n} \cdot e^{-2n}}{(\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n})^2} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot 2^{2n} \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n}}{2\pi n \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

33

Calcular

$$\mathbf{\lim \left[\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right]}$$

Para obtener este límite, observemos que

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \overset{n}{\cdots} + \frac{n}{n^2+1} > \frac{n}{n^2+1} +$$

$$+ \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots \frac{n}{n^2+n}$$

ya que $\frac{n}{n^2+1} > \frac{n}{n^2+h}$, $h > 1$, y que

$$v_n = \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \overset{n}{\cdots} + \frac{n}{n^2+n} > \frac{n}{n^2+1} +$$

$$+ \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

ya que $\frac{n}{n^2+n} > \frac{n}{n^2+h}$, $h < n$. Pero

$$\text{lím}\, u_n = \text{lím}\, n \cdot \frac{n}{n^2+1} = \text{lím} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

$$\text{lím}\, v_n = \text{lím}\, n \cdot \frac{n}{n^2+n} = \text{lím} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$$

Luego el límite de la sucesión anterior —que constantemente está comprendida entre dos sucesiones que tienen el mismo límite— será 1, límite común de ambas sucesiones.

34

Calcular

$$\textbf{lím}\left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}^2+\mathbf{1}}} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}^2+\mathbf{2}}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}^2+\mathbf{2}\boldsymbol{n}}}\right]$$

La sucesión dada está constantemente comprendida entre

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \overset{2n}{\cdots} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 2n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

y

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \overset{2n}{\cdots} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} = 2n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$

y como

$$\text{lím}\ u_n = \text{lím}\ v_n = 2$$

el límite pedido será también 2.

35

Estudiar la convergencia de la serie:

$$\boldsymbol{u_n = \frac{2^n}{n!}}$$

Apliquemos el criterio de D'Alambert a nuestro problema; para ello, empezamos por formar u_{n-1}, escribiendo n–1 en lugar de n en u_n;

$$u_{n-1} = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

Hallamos la razón y simplificamos:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\dfrac{2^n}{n!}}{\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{2}{n}$$

y calcularemos el límite:

$$\text{lím}\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{2}{n} = 0$$

Como el límite es 0 < 1, la serie es, con seguridad, convergente, esto es, la suma de sus infinitos términos será un número finito.

Compruébese que se obtiene el mismo resultado mediante el criterio de Cauchy, ya que

$$\text{lím}\sqrt[n]{u_n} = \text{lím}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} = 0$$

36

Carácter de la serie de término general

$$\boldsymbol{u_n = \frac{(n-1)^{2n}}{(n^2+n+1)^{3n}}}$$

Aplicando el criterio de Cauchy:

$$\text{lím}\ \sqrt[n]{u_n} = \text{lím}\sqrt[n]{\frac{(n-1)^{2n}}{(n^2+n+1)^{3n}}} = \text{lím}\frac{(n-1)^2}{(n^2+n+1)^3} = 0$$

puesto que el grado del numerador es inferior al del denominador.

Como lím $\sqrt[n]{u_n} = 0$, la serie es convergente.

37

Carácter de la serie de término general

$$\boldsymbol{u_n = \frac{n^2+1}{n!}}$$

Aplicando el criterio de D'Alambert:

$$\text{lím}\frac{u_n}{u_{n-1}} = \text{lím}\frac{\dfrac{n^2+1}{n!}}{\dfrac{(n-1)^2+1}{(n-1)!}} = \text{lím}\frac{(n^2+1)(n-1)!}{(n^2-2n+2)n!} = \text{lím}\frac{n^2+1}{(n^2-2n+2)\cdot n}$$

puesto que

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n} = \frac{1}{n}$$

Pero

$$\text{lím}\frac{n^2+1}{(n^2-2n+2)\cdot n} = \text{lím}\frac{n^2+1}{n^3-2n^2+2n} = 0$$

ya que el grado del numerador es inferior al del denominador. Como aplicando el criterio de D'Alambert, se ha obtenido

$$\text{lím}\frac{u_n}{u_{n-1}} = 0$$

la serie es convergente.

38

Estudiar la convergencia de

$$\boldsymbol{u_n = \frac{n}{2^n}}$$

Aplicando el criterio de Cauchy:

$$\text{lím}\sqrt[n]{u_n} = \text{lím}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \text{lím}\frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

ya que $\text{lím}\sqrt[n]{n} = 1$.

Luego la serie es convergente.

Obténgase análogo resultado por aplicación del criterio de D'Alambert.

39

Estudiar la convergencia de la serie de término general

$$\boldsymbol{u_n = \frac{1}{n^2}}$$

Apliquemos el criterio de D'Alambert

$$\text{lím}\frac{u_n}{u_{n-1}} = \text{lím}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n-1)^2}} \qquad \text{lím}\frac{u_n}{u_{n-1}} = \text{lím}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n-1)^2}} = \text{lím}\frac{(n-1)^2}{n^2} = 1$$

Nos encontramos así, pues, en el caso dudoso. Para precisar, en estos casos, si la serie es o no convergente, se acostumbra aplicar el llamado criterio de Raabe-Duhamel, que dice:

$$\text{lím}\, n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = L$$

En nuestro problema, la aplicación del criterio de Raabe proporciona:

$$\text{lím}\, n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \text{lím}\, n\left(1 - \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1}\right) =$$

$$= \text{lím}\, n \cdot \frac{2n+1}{n^2 + 2n + 1} = \text{lím}\frac{2n^2 + n}{n^2 + 2n + 1} = 2 > 1$$

Luego la serie es convergente.

40

Estudiar si es convergente la serie

$$\boldsymbol{u_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

Apliquemos el criterio de D'Alambert:

$$\text{lím}\,\frac{u_n}{u_{n-1}} = \text{lím}\,\frac{\dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}}{\dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)}} = \text{lím}\,\frac{n^2}{(n-1)(n+3)} = \text{lím}\,\frac{n^2}{n^2+2n-3} = 1$$

Caso dudoso, apliquemos el criterio de Raabe:

$$\text{lím}\; n\left(1-\frac{u_{n-1}}{u_n}\right) = \text{lím}\; n\left(1-\frac{n^2}{n^2+2n-3}\right) =$$

$$= \text{lím}\; n\frac{2n-3}{n^2+2n-3} = \text{lím}\,\frac{2n^2-3n}{n^2+2n-3} = 2 > 1$$

luego la serie es convergente.

41

Carácter de la serie de término general:

$$\boldsymbol{u_n = \frac{n+1}{n^3}}$$

La serie es convergente, como deberá comprobar el lector, por aplicación sucesiva de los criterios de D'Alambert y de Raabe; el último límite que se debe obtener vale 2.

42

Carácter de la serie de término general:

$$\boldsymbol{u_n = \frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

Directamente se aprecia que la serie es divergente, ya que no verifica la condición necesaria —pero no suficiente— de convergencia, que era: lím $u_n = 0$, ya que, en nuestro caso:

$$\text{lím}\, u_n = \text{lím}\frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \text{lím}\frac{n^3}{n^3+6n^2+11n+6} = 1 \neq 0$$

43

Obtener el carácter de la serie de término general

$$\boldsymbol{u_n = \frac{n^h}{n!}}$$

siendo *h* un número natural.

Aplicando el criterio de D'Alambert

$$\text{lím}\frac{u_n}{u_{n-1}} = \text{lím}\frac{\dfrac{n^h}{n!}}{\dfrac{(n-1)^h}{(n-1)!}} = \text{lím}\frac{n^{h-1}}{(n-1)^h}$$

resultado al que se llega después de simplificar, sucesivamente, por $(n-1)!$ y por n.

En el límite obtenido, como h es un número finito, el grado del numerador es inferior al del denominador, luego:

$$lím\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$$

Por tanto, la serie es convergente.

44

Estudiar el carácter de

$$\boldsymbol{u_n = \frac{n!}{n^n}}$$

Aplicando el criterio de D'Alambert:

$$\text{lím}\frac{u_n}{u_{n-1}} = lím\frac{\dfrac{n!}{n^n}}{\dfrac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}}} = \text{lím}\frac{n(n-1)^{n-1}}{n^n} = \text{lím}\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} =$$

$$= \text{lím}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}$$

Como $\text{lím}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{e} < 1$, la serie es convergente.

45

Carácter de la serie

$$\boldsymbol{u_n = \frac{n^n}{a^n \cdot n!}}$$

donde *a* es número real.

Aplicando el criterio de D'Alambert:

$$\text{lím}\frac{u_n}{u_{n-1}} = \text{lím}\frac{\dfrac{n^n}{a^n n!}}{\dfrac{(n-1)^{n-1}}{a^{n-1}(n-1)!}} = \text{lím}\frac{n^{n-1}}{a(n-1)^{n-1}} = \text{lím}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{e}{a}$$

Si $a > e$, la serie es convergente; si $a < e$ la serie es divergente, y si $a = e$, estamos en el caso dudoso.

Para resolver este caso de indeterminación se aplica el criterio logarítmico:

$$\text{lím}\frac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n} = L \qquad \begin{cases} L > 1 \text{ convergente} \\ L < 1 \text{ divergente} \end{cases}$$

donde ln representa logaritmo neperiano.

Por tanto, hay que calcular el límite:

$$\text{lím} \frac{\ln \dfrac{e^n \cdot n!}{n^n}}{\ln n}$$

Recordando (fórmula de Stirling) que

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

resulta:

$$\text{lím} \frac{\ln \dfrac{e^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}}{n^n}}{\ln n} = \text{lím} \frac{\ln \sqrt{2\pi n}}{\ln n} = \frac{1}{2} \text{lím} \frac{\ln(2\pi) + \ln n}{\ln n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

luego si $a = e$, la serie es divergente.

46

Carácter de la serie, cuyos primeros términos son:

$$\boldsymbol{u_1 = \frac{1}{2^2};\quad u_2 = -\frac{2}{3^2};\quad u_3 = \frac{3}{4^2};\quad u_4 = -\frac{4}{5^2};\quad \cdots}$$

Es inmediato observar que se trata de una serie alternada, cuyo término general es:

$$u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{(n+1)^2}$$

Como:

$$\text{lím}\, |u_n| = \text{lím} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{(n+1)^2} \right| = \text{lím} \frac{n}{n^2 + 2n + 1} = 0$$

se trata de una serie convergente, puesto que $|u_n|$ era monótona decreciente.

47

Carácter de la serie, cuyos primeros términos son:

$$\frac{2}{7}-\frac{5}{11}+\frac{8}{15}-\frac{11}{19}+\frac{14}{23}-\frac{17}{27}+\cdots$$

Se trata de una serie alternada, que será convergente si su término general tiende a cero.

Se aprecia que la sucesión formada por los numeradores (en valor absoluto) es una progresión aritmética de primer término 2 y razón 3; luego

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)\cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$$

Los denominadores forman una progresión aritmética de primer término 7 y razón 4; luego

$$b_n = b_1 + (n-1)d = 7 + (n-1)\cdot 4 = 4n + 3$$

Por tanto, el término general de la serie es

$$u_n = \frac{3n-1}{4n+3}$$

Como

$$\text{lím } u_n = \frac{3}{4} \neq 0$$

esto es, el límite del término general no es cero, la serie es divergente.

48

Por comparación con una serie geométrica, verificar que la serie

$$u_n = \frac{1}{n!}$$

es convergente.

En algunas ocasiones es útil aplicar el llamado criterio de comparación:

Si la serie de término general u_n es tal que $u_n \leq v_n$ ($u_n \geq v_n$), siendo v_n el término general de una serie convergente (divergente), la serie u_n es convergente (divergente).

NOTA. Las desigualdades indicadas basta que se verifiquen a partir de un cierto término.

Si comparamos $n!$ con 2^n, se tiene:

$$1! < 2^1; \quad 2! < 2^2; \quad 3! < 2^3$$

Pero, a partir de aquí:

$$4! > 2^4; \quad 5! > 2^5; \ldots$$

y, en general, $n! > 2^n$ y, por tanto, a partir del cuarto término:

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

Pero como la serie de término general $1/2^n$ es geométrica, de razón un medio, es, por tanto, convergente, y como la serie de término general $1/n!$ (a partir del cuarto término) se mantiene inferior a ella, será también convergente.

49

Por comparación con la serie armónica, comprobar que la serie de término general

$$\boldsymbol{u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}}$$

es divergente.

Se comprueba fácilmente que $n > \ln(n + 1)$; por tanto,

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Luego los términos de la serie propuesta se mantienen superiores a los de una serie (la armónica) que es divergente; esto es, la serie propuesta es divergente.

50

Sumar la serie geométrica

$$\boldsymbol{S = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \cdots}$$

Como la razón es un cuarto (cada término se obtiene multiplicando el anterior por 1/4) se tendrá:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

51

Hallar la fracción generatriz de la decimal periódica pura $2,\widehat{45}$. Se tiene

$$\mathbf{2,45454545... = 2 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100^2} + \frac{45}{100^3} + \frac{45}{100^4} + \cdots}$$

Se trata, a partir del segundo sumando, de una serie geométrica de razón 1/100. Por tanto:

$$2,\widehat{45} = 2 + \frac{\frac{45}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{45}{99} = 2 + \frac{5}{11} = \frac{27}{11}$$

52

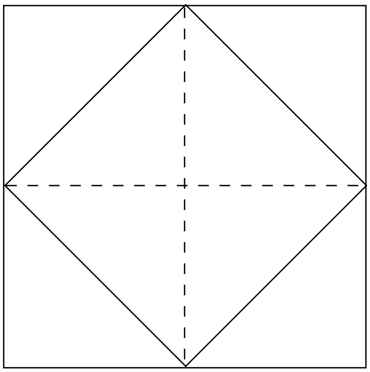
En un cuadrado de un metro de lado se inscribe otro cuadrado, según se aprecia en la figura; en este segundo cuadrado se repite la operación y se continúa así sucesiva e indefinidamente.

Hallar la suma de las áreas de los infinitos cuadrados.

Observando la figura, se aprecia que el área de cada cuadrado es la mitad de la del cuadrado precedente. Por tanto, la suma de las áreas pedidas será:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \text{ metros cuadrados}$$

puesto que forman una serie geométrica de razón 1/2.



53

Hallar

$$\sum_{n-1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Formemos la suma de n términos

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

Multipliquemos ambos miembros por la razón de la geométrica, o sea 1/2

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{32} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$$

y restemos esta expresión de la precedente:

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

En el límite:

$$\frac{1}{2} S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \quad (\text{puesto que } \lim \frac{n}{2^{n+1}} = 0)$$

de donde $S = 2$.

NOTA: Para que una serie aritmético-geométrica sea convergente basta que la razón, en valor absoluto, de la serie geométrica sea menor que la unidad.

54

Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n}$$

Es una serie aritmético-geométrica:

$$S_n = \frac{4}{3} + \frac{7}{3^2} + \frac{10}{3^3} + \frac{13}{3^4} + \cdots + \frac{3n+1}{3^n}$$

Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{3} < 1$.

$$\frac{1}{3}S_n = \frac{4}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \frac{10}{3^4} + \frac{13}{3^5} + \cdots + \frac{3n+1}{3^{n+1}}$$

De donde, por diferencia, se encuentra:

$$\frac{2}{3}S_n = \frac{4}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \cdots + \frac{3}{3^n} - \frac{3n+1}{3^{n+1}}$$

o bien, pasando al límite

$$\frac{2}{3}S = \frac{4}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6}$$

de donde:

$$S = \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{6} = \frac{11}{4}$$

55

Sumar la serie (caso de ser convergente) cuyos primeros términos son

$$\mathbf{\frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{11}{8} + \frac{15}{16} + \frac{19}{32} + \cdots}$$

Se observa que es el producto término a término de la progresión aritmética

3, 7, 11, 15, 19, …

por la progresión geométrica

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots$$

cuya razón es 1/2. Por tanto, como la razón de la geométrica es menor que la unidad, la serie propuesta es convergente.

Siendo S la suma buscada

$$S = \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{11}{8} + \frac{15}{16} + \frac{19}{32} + \cdots$$

multiplicando por la razón de la geométrica y restando miembro a miembro

$$\frac{1}{2}S = \quad \frac{3}{4} \quad + \frac{7}{8} \quad + \frac{11}{16} \quad + \frac{15}{32} \quad + \cdots$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{3}{2} + \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{11}{8} - \frac{7}{8}\right) + \left(\frac{15}{16} - \frac{11}{16}\right) + \left(\frac{19}{32} - \frac{15}{32}\right) + \cdots$$

y, después de simplificar:

$$\frac{1}{2}S = \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Como la suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Se tiene

$$\frac{1}{2}S = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

de donde la suma buscada es

$$S = 7$$

56

Descomposición de un cociente de polinomios en suma de fracciones simples.

Sean dos polinomios en n, $P(n)$ y $Q(n)$, tales que el grado de $P(n)$ sea menor que el grado de $Q(n)$; si suponemos, además, que todas las raíces de $Q(n)$ son reales y distintas, la fracción algebraica dada se puede descomponer:

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{A}{n-a} + \frac{B}{n-b} + \frac{C}{n-c} + \cdots$$

donde a, b, c, … representan las raíces de $Q(n) = 0$, y A, B, C, … son números calculables a partir de la igualdad establecida.

Sea descomponer en suma de fracciones simples:

$$\frac{5n+7}{n^2 + 3n + 2}$$

Como el grado del numerador es inferior al del denominador y, además, las raíces de $n^2 + 3n + 2 = 0$ son $n = -1$, $n = -2$, reales y distintas, se puede escribir

$$\frac{5n+7}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2}$$

Suprimiendo denominadores:

$$5n + 7 = A(n + 2) + B(n + 1)$$

Para $n = -1$ (primera raíz hallada) se tiene:

$$5 \cdot (-1) + 7 = A(-1 + 2) + B(-1 + 1); \quad 2 = A$$

y para $n = -2$ (la otra raíz hallada)

$$5 \cdot (-2) + 7 = A(-2 + 2) + B(-2 + 1); \quad -3 = -B; \quad B = 3$$

Luego, sustituyendo A y B por sus valores, se tendrá:

$$\frac{5n+7}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+2}$$

que expresa la fracción dada en suma de fracciones simples.

NOTA: El estudio general de la descomposición en suma de fracciones simples, se desarrola con detalle en la teoría de integrales indefinidas. En esta lección sólo nos interesa el caso señalado, pues es el único que aplicaremos en los sucesivos ejercicios.

57

Descomponer en suma de fracciones simples la fracción:

$$\boldsymbol{\frac{n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

Como el grado del numerador es inferior al del denominador y las raíces de éste son todas distintas: $n = -1$, $n = -2$, $n = -3$, la fracción dada se puede escribir

$$\frac{n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3}$$

y suprimiendo denominadores:

$$n + 5 = A(n + 2)(n + 3) + B(n + 1)(n + 3) + C(n + 1)(n + 2)$$

para $n = -1$; $4 = 2A$; $A = 2$
para $n = -2$; $3 = -B$; $B = -3$
para $n = -3$; $2 = 2C$; $C = 1$

Luego:

$$\frac{n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n+2} + \frac{1}{n+3}$$

58

Calcular

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

Comprobaremos previamente que la serie de término general

$$u_n = \frac{n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

es convergente, lo cual se consigue fácilmente aplicando sucesivamente los criterios de D'Alambert y de Raabe.

Entonces, descompuesto su término general en fracciones simples, se tiene (véase ejercicio anterior):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$$

Desarrollando cada uno de estos sumatorios

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} = \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3}{n+2} = \frac{-3}{3} + \frac{-3}{4} + \frac{-3}{5} + \frac{-3}{6} + \frac{-3}{7} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$$

y sumando miembro a miembro:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$$

ya que los siguientes términos de la suma se anulan (puesto que 2 + (– 3) + 1 = 0)

$$\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=0;\quad \frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=0,\text{ etc.}$$

Luego la suma pedida es 2/3.

59

Calcular

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+2)}}$$

La serie resulta ser divergente, puesto que

$$\frac{n+3}{n(n+2)}=\frac{n+2}{n(n+2)}+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+2)}>\frac{1}{n}$$

Sus términos superan a los de la serie armónica, que sabemos es divergente; luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+2)}=\infty$$

Se llega al mismo resultado aplicando sucesivamente los criterios de D'Alambert y Raabe.

60

Obtener la suma de la serie

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8n+14}{n^3+6n^2+11n+6}}$$

Resolviendo la ecuación $n^3 + 6n^2 + 11n + 6 = 0$ se deben obtener $n = -1$, $n = -2$ y $n = -3$; descomponiendo en suma de fracciones simples:

$$\frac{8n+14}{n^3+6n^2+11n+6}=\frac{8n+14}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}+\frac{C}{n+3}$$

Suprimiendo denominadores

$$8n + 14 = A(n + 2)(n + 3) + B(n + 1)(n + 3) + C(n + 1)(n + 2)$$

Para $n = -1$: $\quad -8 + 14 = A \cdot 1 \cdot 2 \quad ; \quad A = 3$

Para $n = -2$: $\quad -16 + 14 = B \cdot (-1) \cdot 1 \quad ; \quad B = 2$

Para $n = -3$: $\quad -24 + 14 = C \cdot (-2) \cdot (-1) \quad ; \quad C = -5$

Obsérvese que

$$A + B + C = 3 + 2 + (-5) = 0$$

De aquí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n+1} = \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n+2} = \qquad \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-5}{n+3} = \qquad\qquad \frac{-5}{3} + \frac{-5}{4} + \frac{-5}{5} + \frac{-5}{6} \cdots$$

Sumando:

$$\sum \frac{8n+14}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} = \frac{3}{1} + \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{2} \right) = 3 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$$

que es la suma pedida.

61

Calcular

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^2 - 1}}$$

Comprobada la convergencia de la serie, descomponiendo su término general en suma de fracciones simples, se debe obtener:

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{n+1}$$

Luego:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}}{n+1}$$

y, por tanto,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}}{n-1}=\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{\frac{1}{2}}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{5}+\cdots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}}{n+1}=\qquad\qquad\frac{-\frac{1}{2}}{3}+\frac{-\frac{1}{2}}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{5}+\cdots$$

y sumando:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

62

Descomposición de $\frac{P(n)}{n!}$ en suma de fracciones más sencillas. ($P(n)$ representa un polinomio en n).

Veámoslo con varios ejemplos.

Sea descomponer

$$\frac{2n+3}{n!}$$

Se tendrá:

$$\frac{2n+3}{n!}=2\cdot\frac{n}{n!}+\frac{3}{n!}$$

y como $\frac{n}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}$, resulta, en definitiva:

$$\frac{2n+3}{n!}=\frac{2}{(n-1)!}+\frac{3}{n!}$$

Sea ahora descomponer

$$\frac{n^2+3n+1}{n!}$$

Se tendrá:

$$\frac{n^2+3n+1}{n!}=\frac{n(n+3)}{n!}+\frac{1}{n!}$$

y la primera fracción se puede escribir:

$$\frac{n(n+3)}{n}=\frac{n+3}{(n-1)!}=\frac{n-1+4}{(n-1)!}=$$

$$=\frac{n-1}{(n-1)!}+\frac{4}{(n-1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{4}{(n-1)!}$$

Se obtiene, en definitiva:

$$\frac{n^2+3n+1}{n!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{4}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}$$

Sea ahora la fracción $\frac{n^3}{n!}$.

Se tiene:

$$\frac{n^3}{n!}=\frac{n^2}{(n-1)!}=\frac{n^2-1+1}{(n-1)!}=\frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}=$$

$$=\frac{n+1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{n-2+3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}=$$

$$=\frac{n-2}{(n-2)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{1}{(n-3)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

Análogamente, se debe obtener:

$$\frac{n^2+4n+5}{(n+2)!}=\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n+2)!}$$

$$\frac{n^3-n^2-3n}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}$$

De forma general se procede como se indica en el ejemplo siguiente.

Sea descomponer:

$$\frac{3n^3-10n^2+10n+2}{n!}$$

que se iguala a trantas fracciones como indica el grado del numerador más uno y cuyos denominadores son $n!$, $(n-1)!$, $(n-2)!$ ... O sea

$$\frac{3n^3-10n^2+10n+2}{n!}=\frac{a}{n!}+\frac{b}{(n-1)!}+\frac{c}{(n-2)!}+\frac{d}{(n-3)!}$$

Suprimiendo denominadores

$$3n^3-10n^2+10n+2=a+bn+cn\,(n-1)+dn\,(n-1)(n-2)$$

y desarrollando

$$3n^3-10n^2+10n+2=a+bn+cn^2-cn+dn^3-3dn^2+2dn$$

e identificando los coeficientes del mismo grado:

$$\begin{array}{lll}
n^3: & 3=d & ;\quad d=3\\
n^2: & -10=c-3d & ;\quad c=-10+9=-1\\
n: & 10=b-c+2d & ;\quad b=10-1-6=3\\
 & 2=a &
\end{array}$$

Luego

$$\frac{3n^3-10n^2+10n+2}{n!}=\frac{2}{n!}+\frac{3}{(n-1)!}-\frac{1}{(n-2)!}+\frac{3}{(n-3)!}$$

63

Series del número *e*.

Es conocido el desarrollo del número

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

El conocimiento de este desarrollo permite la obtención de las sumas de diversas series. Sea, por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+2)!}$$

Desarrollando:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+2)!}=2\left[\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\right]$$

Nos basta completar el desarrollo, para lo cual

$$2\left[\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\right]=$$

$$=2\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right]$$

Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+2)!}=e-1-1-\frac{1}{2}=2e-5$$

64

Calcular

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}$$

Desarrollando y completando:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}-1=e-1$$

65

Calcular

Como (véase ejercicio 66)

$$\frac{n^2+3n+1}{n!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{4}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}$$

se tendrá:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2+3n+1}{n!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{(n-1)!}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Desarrollando cada una de las series:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e-1$$

$$4\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=4\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\right)=4\left(e-1-\frac{1}{1!}\right)=4e-8$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}=e-\frac{5}{2}$$

Luego:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2+3n+1}{n!}=(e-1)+(4e-8)+e-\frac{5}{2}=6e-\frac{23}{6}$$

66

Obtener

$$\boldsymbol{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n^2-5n-1}{n!}}$$

Descomponiendo en suma de fracciones

$$\frac{3n^2-5n-1}{n!}=\frac{A}{n!}+\frac{B}{(n-1)!}+\frac{C}{(n-2)!}$$

Suprimiendo denominadores, teniendo en cuenta que

$$\frac{n!}{n}=(n-1)! \quad \text{y} \quad \frac{n!}{n-2!}=n(n-1)$$

resulta

$$3n^2-5n-1=A+Bn+Cn(n-1)=Cn^2+(B-C)n+A$$

de donde, identificando coeficientes de los términos de igual grado

$$3=C \quad ; \quad B-C=-5 \quad ; \quad A=-1$$

o sea

$$A=-1 \quad ; \quad B=-2 \quad \text{y} \quad C=3$$

Por tanto

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n^2-5n-1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-1}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-2}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(n-2)!}$$

Desarrollando cada suma parcial

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-1}{n!}=-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)=-\left[e-\left(1+\frac{1}{1!}\right)\right]=2-e$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-2}{(n-1)!}=-2\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\right)=-2[e-1]=2-2e$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(n-2)!}=3\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\right)=3e$$

Luego la suma será

$$S=(2-e)+(2-2e)+3e=4$$

67

La serie armónica. Recuérdese que la suma de *n* términos de la serie armónica es

$$\boldsymbol{H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

la suma de *n* términos pares es

$$\boldsymbol{P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n};\quad P_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}H_n}$$

y la suma de *n* términos impares es

$$\boldsymbol{I_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1};\quad I_n+P_n=H_{2n}\to I_n=H_{2n}-\frac{1}{2}H_n}$$

Sabiendo esto, obtener:

$$\boldsymbol{S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}}$$

La serie propuesta es convergente, puesto que es alternada y el límite de su término general es cero.

Formando las sumas sucesivas de dos, cuatro, seis... términos, se tiene

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = I_1 - P_1$$

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = I_2 - P_2$$

$$S_6 = I_3 - P_3$$

y, en general, teniendo en cuenta que $H_n = ln\ n + \eta + \varepsilon_n$

$$S_{2n} = I_n - P_n = \left(H_{2n} - \frac{1}{2}H_n\right) - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n =$$

$$= (\ln 2n + \eta + \varepsilon_{2n}) - (\ln n + \eta + \varepsilon_n) = \ln 2 + \ln + \eta + \varepsilon_{2n} - (\ln n + \eta + \varepsilon_n) =$$

$$= \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n$$

Pasando al límite

$$S = \text{lím}\ S_{2n} = 1\text{n}\ 2$$

puesto que ε_{2n} y ε_n son infinitésimos que tienden a cero si $n \to \infty$.

68

Calcular

$$\boldsymbol{S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots}$$

Formemos las sumas sucesivas:

$$S_3 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = I_2 - P_1$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} = I_4 - P_2$$

$$S_9 = I_6 - P_3$$

y, en general,

$$S_{3n} = I_{2n} - P_n$$

Como (véase ejercicio anterior)

$$I_{2n} = H_{4n} - \frac{1}{2}H_{2n} = (\ln 4n + \eta + \varepsilon_{4n}) - \frac{1}{2}(\ln 2n + \eta + \varepsilon_{2n}) =$$

$$= \ln 4 + \ln n + \eta + \varepsilon_{4n} - \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln n + \eta + \varepsilon_{2n})$$

$$P_n = \frac{1}{2}(\ln n + \eta + \varepsilon_n)$$

resulta

$$I_{2n} - P_n = \ln 4 - \frac{1}{2}\ln 2 + \varepsilon_{4n} - \frac{1}{2}\varepsilon_{2n} - \frac{1}{2}\varepsilon_n$$

y pasando al límite

$$S = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2$$

69

Calcular la suma

$$\boldsymbol{S = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \cdots}$$

Se forman las sumas de tres, seis, nueve... términos

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 = H_3 - H_1$$

$$S_6 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \left(\frac{3}{3} + \frac{3}{6}\right) =$$

$$= H_6 - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = H_6 - H_2$$

$$S_9 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \left(\frac{3}{3} + \frac{3}{6} + \frac{3}{9}\right) =$$

$$= H_9 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = H_9 - H_3$$

y en general

$$S_{3n} = H_{3n} - H_n$$

La suma pedida se hallará pasando al límite

$$\begin{aligned} S = \text{lím } S_{3n} = \text{lím } (H_{3n} - H_n) = \text{lím } [\ln 3n + \eta + \varepsilon_{3n} - (\ln n + \eta + \varepsilon_n)] = \\ = \text{lím } (\ln 3 + \ln n + \eta + \varepsilon_{3n} - \ln n - \eta - \varepsilon_n) = \\ = \text{lím } (\ln 3 + \varepsilon_{3n} - \varepsilon_n) = \ln 3 \end{aligned}$$

puesto que lím ε_{3n} y lím ε_n son cero.